Clase del 10/1/09

★ Campo Vectorial Conservativo en $\mathbb{R}^3$

Sea un campo Vectorial $F(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$.

F, es conservativo si

$$\text{rot } F(x,y,z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \; ; \; \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \; y \; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Ejercicio: Ver Larson Vol 2 ejemplo 8 1298 pp
Leithold ejemplo 2 1081 pp.

★ Divergencia de un Campo Vectorial

Sea $F(x,y,z) = Mi + Nj + Pk$ un campo Vectorial donde M, N y P son función de x, y, z.

$$\text{div } F(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Si $F(x,y) = Mi + Nj$ entonces

$$\text{div } F(x,y) = \nabla \cdot F(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = 3x^2y\,i + 2\frac{y^2}{xz}\,j + xye^{2z}\,k$

$$\text{div } F(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(3x^2y, \frac{2y^2}{xz}, xye^{2z}\right)$$

$$\text{div } F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y^2}{xz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xye^{2z}\right)$$

$$= 6xy + \frac{4y}{xz} + 2xye^{2z} \;//$$

Clase del 10/1/09

★ Curvas Suaves a trozos

Para $\mathbb{R}^2$ Sea $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en $a \le t \le b$.

La curva es suave si y solo si

a) $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas en $[a, b]$.

b) $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultaneamente nulas.

Para $\mathbb{R}^3$ Sea $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ en $a \le t \le b$.

Es suave sii

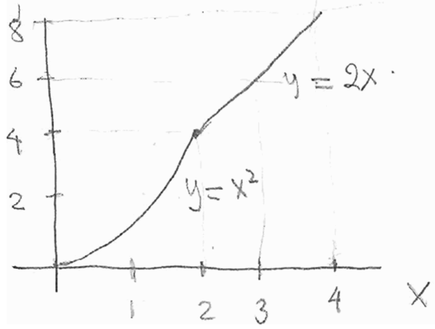
a) $f'(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son contínuas en $[a, b)$

b) $f'(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ No son simultáneamente nulas.

(LEITHOLD)

Una curva C es suave a trozos si $[a, b]$ se puede dividir en un número finito de segmentos en las cuales C es suave. (Larson)

Ejemplo:



$$y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$$

$$y = 2x \Rightarrow \begin{cases} y = 2t \\ x = t \end{cases} \quad 2 \le t \le 4$$

★ Integrales de Linea

$V = \iint_R f(x,y)\, dA \rightarrow$ Integral sobre la región

$I = \iiint_Q f(x,y,z)\, dv \rightarrow$ Integral sobre el volúmen

$W = \int_C f(x,y)\, ds \rightarrow$ Integral sobre la curva C en el Plano

$W = \int_C f(x,y,z)\, ds \rightarrow$ Integral sobre la curva C en el Espacio.

Clase 10/1/9

★ Definición de Integral de Línea (Larson).

Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, la integral de línea de f sobre C se define como.

$$W = \int_C f(x,y)\,ds = \lim_{|\Delta s| \to 0} \sum_{n=1}^{n} f(x_n, y_n)\,\Delta s_n \qquad (R^2)$$

$$W = \int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{|\Delta s| \to 0} \sum_{n=1}^{n} f(x_n, y_n, z_n)\,\Delta s_n \qquad (R^3)$$

Sii el límite Existe

★ Integral de Línea como Integral definida. (Larson)

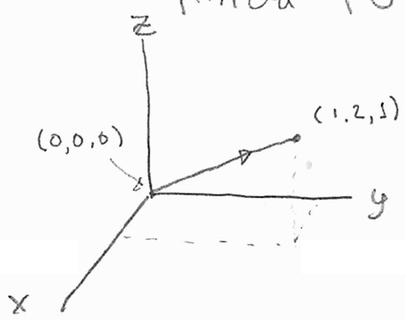
Si C es suave y definida como $r(t) = x(t)i + y(t)j$ en $[a,b]$

$$W = \int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \qquad (R^2)$$

Si C es suave y definida como $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ en $[a,b]$

$$W = \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt \qquad (R^3)$$

Ejercicio: Calcular $W = \int_C (x^2 - y + 3z)\,ds$ donde C. está definida por



Paramatrizando C $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

donde $0 \leq t \leq 1$

Clase del 10/1/9

$$W = \int_c (x^2 - y + 3z)\, ds \qquad C = \begin{cases} x = t \rightarrow x' = 1 \\ y = 2t \rightarrow y' = 2 \\ z = t \rightarrow z' = 1 \end{cases}$$

donde $0 \leq t \leq 1$

NotA: C es suave en todo el Intervalo!

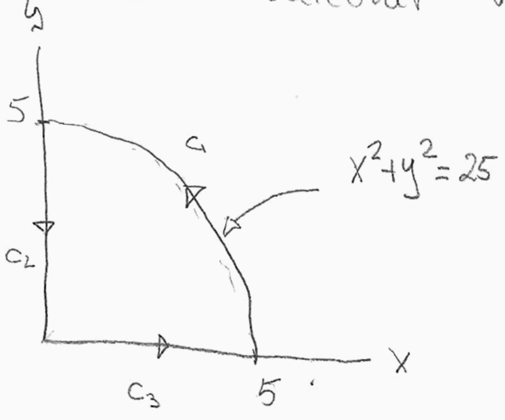
$$W = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$(t)^2 - (2t) + 3(t) \qquad \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$W = \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t)\sqrt{6}\, dt = \sqrt{6}\int_0^1 (t^2 + t)\, dt = \sqrt{6}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$W = \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{6}\ U //$$

Ejercicio: Calcular $W = \int_c (3x^2y + y^2)\, ds$ donde C es



$C = C_1 + C_2 + C_3$

Parametrizando C_1

$x^2 + y^2 = 25$ ①

$x = 5\,\text{Sen}\,t$ ②

Sustituyo ② en ①

$25\,\text{Sen}^2 t + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - 25\,\text{Sen}^2 t$

$y = \sqrt{25(1 - \text{Sen}^2 t)} \Rightarrow y = 5\,\text{Sen}\,t$

$$C_1 = \begin{cases} x = 5\,\text{Sen}\,t \\ y = 5\cos t \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \pi/2$

Parametrizando C_2

y	t
5	$\pi/2$
0	π

$$m = \frac{5}{\pi - \pi/2} = \frac{10}{\pi}$$

$$y = \frac{10}{\pi}t + b$$

Clase 10/1/09

$y = \frac{10}{\pi} t + b \Rightarrow (\pi, 0)$

$0 = 10 + b \Rightarrow b = -10$

$C_2 \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{10}{\pi} t - 10 \end{cases}$

$\pi/2 \leq t \leq \pi$

Parametrizando C_3.

x	t
0	π
5	2π

$x = mt + b$

$m = \frac{5}{2\pi - \pi} = \frac{5}{\pi}$

$x = \frac{5}{\pi} t - 5$

$x = \frac{5}{\pi} t + b \quad (\pi, 0)$

$0 = 5 + b \Rightarrow b = -5$

$C_3 \begin{cases} x = \frac{5}{\pi} t - 5 \\ y = 0 \end{cases}$

$\pi \leq t \leq 2\pi$

$$W = \int_C (3x^2y + y^2)\, ds = \int_{C_1} (3x^2y + y^2)\, ds + \int_{C_2} (3x^2y + y^2)\, ds$$

$$+ \int_{C_3} (3x^2y + y^2)\, ds$$

$\int_{C_1} (3x^2y + y^2)\, ds$

$C_1 \begin{cases} x = 5\,\text{Sen}\,t \Rightarrow x' = 5\cos t \\ y = 5\cos t \Rightarrow y' = -5\,\text{Sen}\,t \end{cases}$

$0 \leq t \leq \pi/2$

$$\int_{C_1} (3x^2y + y^2)\, ds = \int_0^{\pi/2} \left[3 \cdot (5\,\text{Sen}\,t)^2\, 5\cos t + 25\cos^2 t\right] \sqrt{25(\text{Sen}^2 t + \cos^2 t)}\; dt$$

$$= 25 \int_0^{\pi/2} (3 \cdot 25 \cdot 5\,\text{Sen}^2 t \cos t + 25\cos^2 t)\, dt$$

$$= 25^2 \int^{\pi/2} (15\,\text{Sen}^2 t \cos t + \cos^2 t)\, dt$$

Clase del 10/1/9

$$\int_{C_1}(3x^2y+y^2)\,ds = 25^2\int_0^{\pi/2}(15\,\text{sen}^2t\cos t+\cos^2t)\,dt$$

$$=25^2\cdot 15\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2t\cos t\,dt + 25^2\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt}_{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}}$$

$u=\text{sen}\,t \qquad u|_{t=0}=0$

$du=\cos t \qquad u|_{t=\pi/2}=1$

$$=25^2\cdot 15\int_0^1 u^2\,du+\frac{25^2}{4}\pi = 25^2\cdot 15\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1+\frac{25^2}{4}\pi$$

$$=25^2\left(\frac{15}{3}+\frac{\pi}{4}\right)u$$

$$\int_{C_2}(3x^2y+y^2)\,ds \qquad \text{donde } C_2=\begin{cases}x=0 \Rightarrow x'=0\\ y=\frac{10}{\pi}t-10\Rightarrow y'=\frac{10}{\pi}\end{cases}$$

$\pi/2\le t\le\pi$

$$\int_{C_2}(3x^2y+y^2)\,ds=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{10}{\pi}t-10\right)^2\sqrt{\left(\frac{\pi}{10}\right)^2}\,dt=\frac{\pi}{10}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{100}{\pi^2}t^2-\frac{20}{\pi}t+10\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{10}\left[\frac{100}{3\pi^2}t^3-\frac{10}{\pi}t^2+10t\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{8}{3}\pi^2\,u$$

$$\int_C(3x^2y+y^2)\,ds=\int_{C_1}(3x^2y+y^2)\,ds+\int_{C_2}(3x^2y+y^2)\,ds+\int_{C_3}(3x^2y+y^2)\,ds$$

$$=25^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)u+\frac{8}{3}\pi^2u+0\ //$$